

УДК: 534.7
OECD: 01.03.AA

Особенности прохождения акустических волн через биологические среды с учетом нелинейности

Вареникова А.Ю.^{1*}, Чернов Н.Н.², Тарасов С.П.³

¹Ассистент, ^{2,3}Д.т.н., профессор,

^{1,2,3}Кафедра Электрогидроакустической и медицинской техники Институт нанотехнологий, электроники и приборостроения Южный федеральный университет, г. Таганрог, РФ

Аннотация

Прохождение акустических волн через биологические среды определяется упругостью и нелинейными свойствами слоистой системы. Описание характеристик распространения волны на основе линейного представления не всегда достаточно полно описывает процесс прохождения волн в слоистой структуре исследуемых биообъектов. Использование же нелинейных характеристик позволяет не только проследить процессы распространения акустических волн, но и построить системы визуализации внутренних структур биологических объектов. В работе представлены основные модели определения акустического нелинейного параметра второго порядка в биологических средах по характеристикам распространения акустических волн. Рассмотрены случаи визуализации среды, неоднородной по нелинейному параметру и однородной по линейным характеристикам, а также среды неоднородной как по нелинейному параметру, так и по линейной характеристике – фазовой скорости звука. Предложена параметрическая модель определения акустического нелинейного параметра среды с учетом нелинейностей второго и третьего порядка. Приведены результаты моделирования изменения уровня второй гармоники акустического сигнала в зависимости от частоты для разных сред. Предложена модель трансмиссионной акустической визуализации нелинейного параметра на основе теоремы Радона.

Ключевые слова: акустический нелинейный параметр, акустическая визуализация, вторая гармоника, уравнение Вестервельта, уравнение Ирншоу, уравнение Бюргерса.

Features of acoustic waves passing through biological media, taking into account non-linearity

Varenikova A.Yu.^{1*}, Chernov N.N.², Tarasov S.P.³

¹Assistant, ^{2,3}DSc, Professor,

^{1,2,3}Department of Electrohydroacoustic and Medical Technology Institute of Nanotechnology, Electronics and Instrumentation Southern Federal University, Taganrog, Russia

Abstract

The passage of acoustic waves through biological media is determined by the elasticity and nonlinear properties of the layered system. The description of wave propagation characteristics based on a linear representation does not always fully describe the process of wave propagation in the layered structure of the studied biological objects. The use of nonlinear characteristics makes it possible not only to trace the propagation of acoustic waves, but also to build visualization systems for the internal structures of biological objects. The paper presents the main models for determining the acoustic nonlinear parameter of the second

order in biological media based on the propagation characteristics of acoustic waves. The cases of visualization of a medium inhomogeneous in a nonlinear parameter and homogeneous in linear characteristics, as well as a medium inhomogeneous in both a nonlinear parameter and a linear characteristic, the phase velocity of sound, are considered. A parametric model for determining the acoustic nonlinear parameter of the medium is proposed, taking into account second- and third-order nonlinearities. The results of modeling changes in the level of the second harmonic of an acoustic signal depending on the frequency for different media are presented. A model of transmission acoustic visualization of a nonlinear parameter based on Radon's theorem is proposed.

Keywords: acoustic nonlinear parameter, acoustic tomography, second harmonic, Westervelt equation, Earnshaw equation, Burgers equation.

Введение

Широкое применение акустических волн для решения задач неразрушающего контроля, медицинской диагностики, исследования многофазных сред породило обширный круг задач в сравнительно новой научной области - акустической визуализации [1,2]. Существующие модели и подходы к получению изображений различных объектов, в том числе и биологических, предполагают не только регистрацию полей прошедших акустических волн для измерения таких линейных характеристик, как локальные величины скорости, коэффициент поглощения, звука, плотность среды, но и позволяют использовать высокие диагностические возможности нелинейных эффектов для изучения внутренних структур исследуемых объектов [3].

Полноценный учёт такой характеристики биологических тканей, как поглощение энергии акустических волн, обусловленного внутренним трением и теплопроводностью среды, когда часть акустической энергии преобразуется в тепло, требует построения соответствующей модели акустической визуализации внутренних структур биологических объектов [4].

В работе [5] решается задача получения изображения внутренних структур на основе измерения как акустического нелинейного параметра, так и скорости звука для случая, когда неоднородные по этим параметрам области пересекаются друг с другом. Данная модель требует учёта конечной апертуры взаимодействующих рассеянных акустических волн. Развитием данных исследований стала работа [6], в которой исследуется возможность применения акустических нелинейных параметров второго и третьего порядков. В работе [7] рассмотрены основные ограничения использования нелинейного параметра третьего порядка. Показано, что уровень полезного сигнала, содержащего информацию о данной характеристике, очень мал и практически полностью подавляется вкладом квадратичного нелинейного параметра.

В работе [8] описан прототип томографической системы, предназначенной для получения послойного изображения объектов на основе использования акустического параметра третьего порядка.

1. Параметрические модели томографии акустического нелинейного параметра

Одним из развиваемых подходов к построению схем акустической визуализации является использование в качестве структурной характеристики акустического

нелинейного параметра

$$\varepsilon = 1 + \frac{\rho_0 \times \frac{dc_0^2}{dP_0}}{2}, \quad (1)$$

где ε – нелинейный параметр, ρ_0 – плотность, c_0 – фазовая скорость звука, P_0 – акустическое давление.

В работе [5] показана модель восстановления акустического нелинейного параметра, в которой проводились измерения по нелинейным характеристикам акустических сигналов, распространяющихся по заданной траектории лучей, выражающихся как интеграл $\varepsilon(x,y)$.

Заданные интегралы рассчитывались при измерениях амплитуды волны разностной частоты или по амплитуде второй гармоники акустического сигнала. Значения фазовой скорости и плотности при этом считались постоянными во всем объекте измерений. Кроме того, данная модель ограничена рамками лучевого приближения, из-за чего появляются ограничения в разрешающей способности данного метода.

Развитием данной модели является работа авторов В.А. Бурова, И.Е. Гуриновича, О.В. Руденко, Е.Я. Тагунова, в которой рассматривается модель восстановления акустического нелинейного параметра с учётом наличия неоднородных значений скорости звука c и плотности ρ , а также самой величины ε [6].

В данной математической модели рассматривается решение задачи, в которой восстанавливаются неоднородности фазовой скорости звука $c(r)$ и нелинейного параметра $\varepsilon(r)$, когда области данных неоднородностей полностью или частично перекрываются.

Исходной системой уравнений для этой модели является система уравнений Эйлера, из которой было получено волновое уравнение относительно основной переменной – давления $p' = p - p_0$:

$$\Delta p' - \frac{1}{c_0^2} \times \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -Q, \quad (2)$$

где t – время распространения колебаний, Q – функция вторичных источников:

$$\frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^4} \times \frac{\partial^2 p'^2}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0 c_0^4} \times \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho_0 \Delta v^2 + \rho_0 v \Delta v, \quad (3)$$

здесь v – колебательная скорость.

На основе уравнения (2) рассматривается процесс генерации волн комбинационных частот при взаимодействии волновых пучков. При разработке математической модели уравнение (2) сводится к уравнению Вестервельта:

$$\Delta p' - \frac{1}{c_0^2} \times \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^4} \times \frac{\partial^2 p'^2}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Уравнение (4) с учётом условий задачи восстановления $c(r)$ и $\varepsilon(r)$ решается методом последовательных приближений:

$$\Delta p' - \frac{1}{c_0^2} \times \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -F(p'), \quad (5)$$

здесь $F(p)$ – функция вторичных источников:

$$F(p') = \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^4} \times \frac{\partial^2 p'^2}{\partial t^2} + \left(\frac{\chi}{c_0^2} \right) \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \right), \quad (6)$$

$$c = c(r), \quad \chi = \chi(r) = c_0^2 \left[\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(r)} \right]. \quad (7)$$

Первое слагаемое для F описывает генерацию волн комбинационных частот и вторых гармоник, второе – рассеяние каждой частоты на неоднородностях скорости звука c . Далее решение задачи рассматривается с точки зрения суперпозиции акустических волн на комбинационных частотах $\omega_{1,2}$, разностной частоте Ω и ν .

С учётом этих граничных условий из уравнения (5) получают ряд выражений для амплитуды каждой из частотных составляющих:

$$\begin{aligned} \Delta p_1 + \frac{\omega_1^2}{c_0^2} p_1 &= \frac{\omega_1^2}{c_0^2} \chi p_1, \\ \Delta p_2 + \frac{\omega_2^2}{c_0^2} p_2 &= \frac{\omega_2^2}{c_0^2} \chi p_2, \\ \Delta p_- + \frac{\Omega^2}{c_0^2} p_- &= \frac{\varepsilon \Omega^2}{\rho_0 c^4} p_1 p_2^* + \frac{\Omega^2}{c_0^2} \chi p_-, \\ \Delta p_+ + \frac{\nu^2}{c_0^2} p_+ &= \frac{\varepsilon \nu^2}{\rho_0 c^4} p_1 p_2 + \frac{\nu^2}{c_0^2} \chi p_+. \end{aligned} \quad (8)$$

Интегральная запись первого и второго уравнений системы (8)

$$p_1(y) = p_1^0(y) + \int_R g_1(y,r) \frac{\omega_1^2}{c_0^2} \chi(r) p_1(r) dr, \quad (9)$$

$$p_2(y) = p_2^0(y) + \int_R g_1(y,r) \frac{\omega_2^2}{c_0^2} \chi(r) p_2(r) dr, \quad (10)$$

где $g_j = \left(-\frac{1}{4\pi}\right) \exp(ik_j |y-r|)/|y-r|$, $j=1,2$ – функции Грина в однородной безграничной среде, $k_{1,2}$ – модули волновых чисел, $p_1^0(y)$ и $p_2^0(y)$ – первичные облучающие поля; $p_1(y)$ и $p_2(y)$ – акустические поля, y – точка наблюдения, R – область рассеяния, в которой располагается неоднородность фазовой скорости c .

С учётом того, что полное акустическое поле известно только в области измерений и неизвестно в области рассеяния, выражения (9) и (10) приобретают следующий вид:

$$p_1(y) = p_1^0(y) + \int_R g_1(y,r) \frac{\omega_1^2}{c_0^2} \chi(r) p_1(r) dr, \quad (11)$$

$$p_1(r) = p_1(y) + \int_R g_1(r,r') \frac{\omega_1^2}{c_0^2} \chi(r') p_1(r') dr',$$

где $y \notin R$, $r, r' \in R$.

Для определения рассеянного поля в модель вводятся операторы $\hat{g}_{1(y,r')}$, который описывает источники колебаний, и $\hat{g}_{1(r,r')}$, отвечающий за вторичные источники, образующиеся в области R . Тогда (11) записывают как:

$$p_1(y) - p_1^0(y) = \frac{\omega_1^2}{c_0^2} \hat{g}_{1(y,r')} \chi(r) p_1(r), \quad (12)$$

$$p_1(r) - p_1^0(r) = \frac{\omega_1^2}{c_0^2} \hat{g}_{1(r,r')} \chi(r') p_1(r').$$

Систему уравнений (12) можно представить в виде:

$$p_1 = p_1^0 + \frac{\omega_1^2}{c_0^2} \hat{g}_{1(y,r)} \left[E - \frac{\omega_1^2}{c_0^2} \chi \hat{g}_{1(r,r')} \right]^{-1} \chi p_1^0, \quad (13)$$

$$p_2 = p_2^0 + \frac{\omega_2^2}{c_0^2} \hat{g}_{2(y,r)} \left[E - \frac{\omega_2^2}{c_0^2} \chi \hat{g}_{2(r,r')} \right]^{-1} \chi p_2^0,$$

где E – единичный оператор на области интегрирования R :

$$E\psi(r') = \int_R \delta(r - r') \psi(r') dr' = \psi(r). \quad (14)$$

Система выражений (13) показывает связь между измеряемым рассеянным полем и зондирующими сигналами через функцию Грина для неоднородной среды:

$$\hat{G}_1 = \hat{g}_{1(y,r)} \left[E - \frac{\omega_1^2}{c_0^2} \chi \hat{g}_{1(r,r')} \right]^{-1} \chi, \quad (15)$$

$$\hat{G}_2 = \hat{g}_{2(y,r)} \left[E - \frac{\omega_2^2}{c_0^2} \chi \hat{g}_{2(r,r')} \right]^{-1} \chi.$$

Для оценки рассеянного поля $\chi(r)$ и нелинейного параметра ε используется система уравнений (15), а комбинационные частоты, рассеянные на неоднородностях скорости звука, описываются двумя последними уравнениями системы (8). Отсюда общее выражение для амплитуды звукового давления разностной частоты будет:

$$p_-^0 = \frac{\Omega^2}{\rho_0} \hat{g}_{-(y,r)} [\beta p_1 p_2^*], \quad (16)$$

где $\beta = \varepsilon(r)/c^4(r)$.

Полное рассеянное поле разностной частоты тогда будет иметь следующий вид:

$$p_- = p_-^0 + \frac{\Omega^2}{c_0^2} \hat{g}_{-(y,r)} \left[E - \frac{\Omega^2}{c_0^2} \chi g_{-(r,r')} \right]^{-1} \chi p_-^0 \quad (17)$$

Задача нелинейного рассеяния волн в среде с рефракционными неоднородностями в данной модели является обратимой за счёт того, что выражения для суммарной и разностной частот полностью идентичны. Кроме того, процесс генерации волн разностной и суммарной частот также описывается идентичными соотношениями [7].

При граничном условии $c(r) = c_0$ амплитуды волн, рассеянных на разностной и суммарной частотах, описываются как

$$p_-(y) = \frac{\Omega^2}{\rho_0 c_0^4} p_{02}^* g_-(y) \tilde{\varepsilon}(K_-), \quad (18)$$

$$p_+(y) = \frac{\Omega^2}{\rho_0 c_0^4} p_{01} p_{02}^* g_+(y) \tilde{\varepsilon}(K_+),$$

здесь K_- – волновой вектор разностной частоты, K_+ – волновой вектор суммарной частоты.

На основе системы уравнений (18) в данной модели происходит восстановление акустического нелинейного параметра в виде $\tilde{\varepsilon}(K)$.

Однако при практической реализации возникает проблема избыточности данных. В случае фиксированных комбинационных частот ω_1 , ω_2 и произвольной ориентации волновых векторов k_1 , k_2 при каждом измерении $\tilde{\varepsilon}(K)$ во всех направлениях облучения объекта исследования приводит к избыточности получаемой информации.

Устранить обозначенную проблему в данной модели позволяет согласованный выбор множества направлений облучения зондирующим излучением. Тем не менее в данной модели необходимо учитывать апертуру и геометрию распространения каждой из взаимодействующих волн.

Развитием параметрической модели восстановления акустического нелинейного параметра явилась схема восстановления данных характеристик с помощью малого числа преобразователей [7]. Основой данной модели является волновое уравнение, полученное относительно давления:

$$\Delta p' - \frac{1}{c^2(r)} \times \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -Q + F_0, \quad (19)$$

где F_0 – источники первичных волн, Q – вторичные источники, представленные в виде:

$$Q = \frac{\varepsilon(r) - 1}{\rho_0 c^4(r)} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0 c^4(r)} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho_0 \Delta v^2 + \rho_0 v \Delta v. \quad (20)$$

Выражения (19) и (20) описывают среду, неоднородную по фазовой скорости, что выражено в зависимости $c(r)$.

Регистрируемое рассеянное акустическое поле описывается уравнением Вестервельта:

$$\Delta p' - \frac{1}{c^2(r)} \times \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon(r)}{\rho_0 c^4(r)} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} + F_0. \quad (21)$$

Использование данного уравнения обусловлено необходимостью учёта только вторичных источников излучения. Первый множитель в правой части описывает нелинейную генерацию вторичных волн, которые возникают вне области параметрического взаимодействия: волны суммарной и разностной частот ω_1 и ω_2 , волны вторых гармоник $2\omega_1$ и $2\omega_2$.

В случае фиксированных монохроматических составляющих $p_j(r, t)$ акустическое поле представляется в виде системы уравнений для комплексных амплитуд $p_j(r)$:

$$\Delta p_{1,2} + \frac{\omega_{1,2}^2}{c^2(r)} p_{1,2} = F_{01,02}, \quad (22)$$

$$\Delta p_{\pm} + \frac{\omega_{\pm}^2}{c^2(r)} p_{\pm} = \frac{\varepsilon(r) \omega_{\pm}^2}{\rho_0 c^4(r)} p_1 p_2^{(*)},$$

где p_1, p_2 – волны с частотами ω_1 и ω_2 , $F_{01,02}$ – источники первичных волн на соответствующей частоте, (*) – знак сопряжения p_2 .

Решение системы уравнений (22) представлено в виде выражения сигналов комбинационных частот:

$$p_{\pm}(y) = \int_R G_{\pm}(y, r) \frac{\varepsilon(r) \omega_{\pm}^2}{\rho_0 c^4(r)} p_1(r) p_2^{(*)}(r) dr, \quad (23)$$

здесь $G_{\pm}(y, r)$ – монохроматические функции Грина для разностной и суммарной частот, распространяющихся в однородной безграничной среде, y – радиус-вектор, определяющий точку наблюдения, R – область рассеяния, где взаимодействуют акустические пучки.

Для расчета акустического поля в дальней зоне функция Грина для монохроматического излучения преобразовывается к виду:

$$G_{\pm}(y, r) \approx G_{\pm}(y, 0) \exp(ik_{\pm}r), \quad (24)$$

здесь k_{\pm} – волновой вектор рассеянной волны на суммарной или разностной частоте.

В случае среды, неоднородной только по нелинейному параметру и однородной по линейным характеристикам, выражение (23) преобразовывается к виду:

$$p_{\pm}(y) \approx \frac{\omega_{\pm}^2}{\rho_0 c_0^4} p_{01} p_{02}^{(*)} G_{\pm}(y, 0) \tilde{\varepsilon}(K_{\pm}), \quad (25)$$

где K_{\mp} – пространственные векторы комбинационных частот.

Данное соотношение является основой для восстановления спектральных характеристик нелинейного рассеивателя $\tilde{\varepsilon}(K_{\pm})$.

При наличии в среде неоднородностей скоростей звука, которые учитываются в виде добавки $\chi(r) = \left[\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(r)} \right]$, уравнение (21) сводится к виду:

$$\Delta p' - \frac{1}{c^2(r)} \times \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = - \left[\frac{\varepsilon(r)}{\rho_0 c^4(r)} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} + \chi(r) \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} \right] + F_0. \quad (26)$$

В данном виде, кроме неоднородности акустического нелинейного параметра, в модели учитывается рассеяние комбинационных частот на неоднородностях скорости звука χ , что приводит к усложнению расчетов.

В работе [8] рассмотрены проблемы использования нелинейных коллинеарных процессов третьего порядка для восстановления нелинейных акустических параметров второго и третьего порядков.

В данной модели в выражении (20) уже учитываются акустические нелинейные параметры второго ε_2 и третьего ε_3 порядков:

$$Q = \left[\frac{\varepsilon(r) - 1}{\rho_0 c^4(r)} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0 c^4(r)} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)^2 + \rho_0 \nabla [(v \nabla) v] + \rho_0 v \nabla (\nabla v) \right] + \\ + \frac{\{2(\varepsilon_2(r) - 1)^2 - \varepsilon_3(r)\}}{\rho_0^2 c^6(r)} \frac{\partial^2 (p^3)}{\partial t^2} + \frac{+2(\varepsilon_2(r) - 1)}{\rho_0^2 c^6(r)} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial (p^2)}{\partial t} + 2(\nabla v) \nabla (\rho' v) - \right. \\ \left. - \nabla [v \{ \nabla (\rho' v) \}] - \nabla [\rho' (\nabla v) v] \right]. \quad (27)$$

В данном случае волновое уравнение уже решается относительно колебательной скорости:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\nabla p}{\rho_0} + \frac{\nabla (p^2)}{2\rho_0^2 c^2(r)} - (v \nabla) v - \frac{\varepsilon_2}{3\rho_0^3 c^4(r)} \nabla (p^3). \quad (28)$$

Используя метод малого параметра, когда вклад каждого из нелинейного параметров является отдельным слагаемым, оценивается вклад нелинейных эффектов второго и третьего порядка малости. Таким же образом представляются нелинейные вторичные источники второго и третьего порядков в правой части волнового уравнения, каждый из которых в свою очередь также является суммой источников, которые их формируют [8-10].

В таком приближении основной задачей акустической визуализации становится не только восстановление распределения акустического нелинейного порядка требуемого параметра, но и разделение вкладов нелинейных порядков второго ε_2 и третьего ε_3 порядков. Также проблематичным является наличие нелинейного параметра третьего порядка мешающего комбинационного сигнала от двойного взаимодействия комбинационных частот второго порядка [11,12].

2. Генерация гармонических составляющих акустической волны в биологических средах

Отдельной задачей, возникающей при разработке систем визуализации внутренних структур, является исследование генерации гармонических составляющих акустических волн, по уровню которых можно рассчитать величину нелинейного параметра [13].

Идеальную среду, являющуюся нелинейной, принято описывать на основе уравнения Ирншоу:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\zeta}{c_0^3} v^2 \frac{\partial v}{\partial \tau}, \quad (29)$$

где $\tau = t - \frac{x}{c}$ – сопровождающая координата, ε – нелинейный параметр второго порядка ζ – нелинейный параметр третьего порядка, v – колебательная скорость.

Отсюда выражение для оценки амплитуды второй гармоники будет:

$$v_{2\omega} = \frac{\varepsilon \omega v_0^2 x}{2c_0^2} \sin(2\omega\tau), \quad (30)$$

ω – циклическая частота колебаний ультразвуковой волны, x – расстояние распространения второй гармоники.

Решение (30) получено для амплитуды колебательной скорости второй гармоники акустического сигнала, которую довольно сложно измерить. Поэтому вместо этой модели в данном случае используют выражение для амплитуды давления второй гармоники:

$$p^{(2)} = \left(\frac{\varepsilon}{2\rho_0^2 c_0^4} \right) \omega p_0^2 x \sin(\omega\tau). \quad (31)$$

На основе выражения (31) проведена оценка частоты основного сигнала на уровень второй гармоники, что показано на рисунке 1.

Результаты, представленные на рисунке 1, показывают степень влияния различных параметров акустического излучения на процесс роста второй гармоники в различных биологических средах. Проведенный анализ результатов позволяет сделать вывод, что при увеличении частоты на 67% давление второй гармоники на расстоянии 10 см увеличивается на 70%, а при изменении давления первой гармоники на 16%, это давление увеличивается на 42%.

Однако данная модель не учитывает наличие диссипативных процессов, характерных для распространения ультразвуковых колебаний в биологических тканях.

Учесть наличие этих процессов позволяет уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}, \quad (32)$$

b – диссипативный коэффициент, ε – нелинейный параметр, τ – сопровождающая координата.

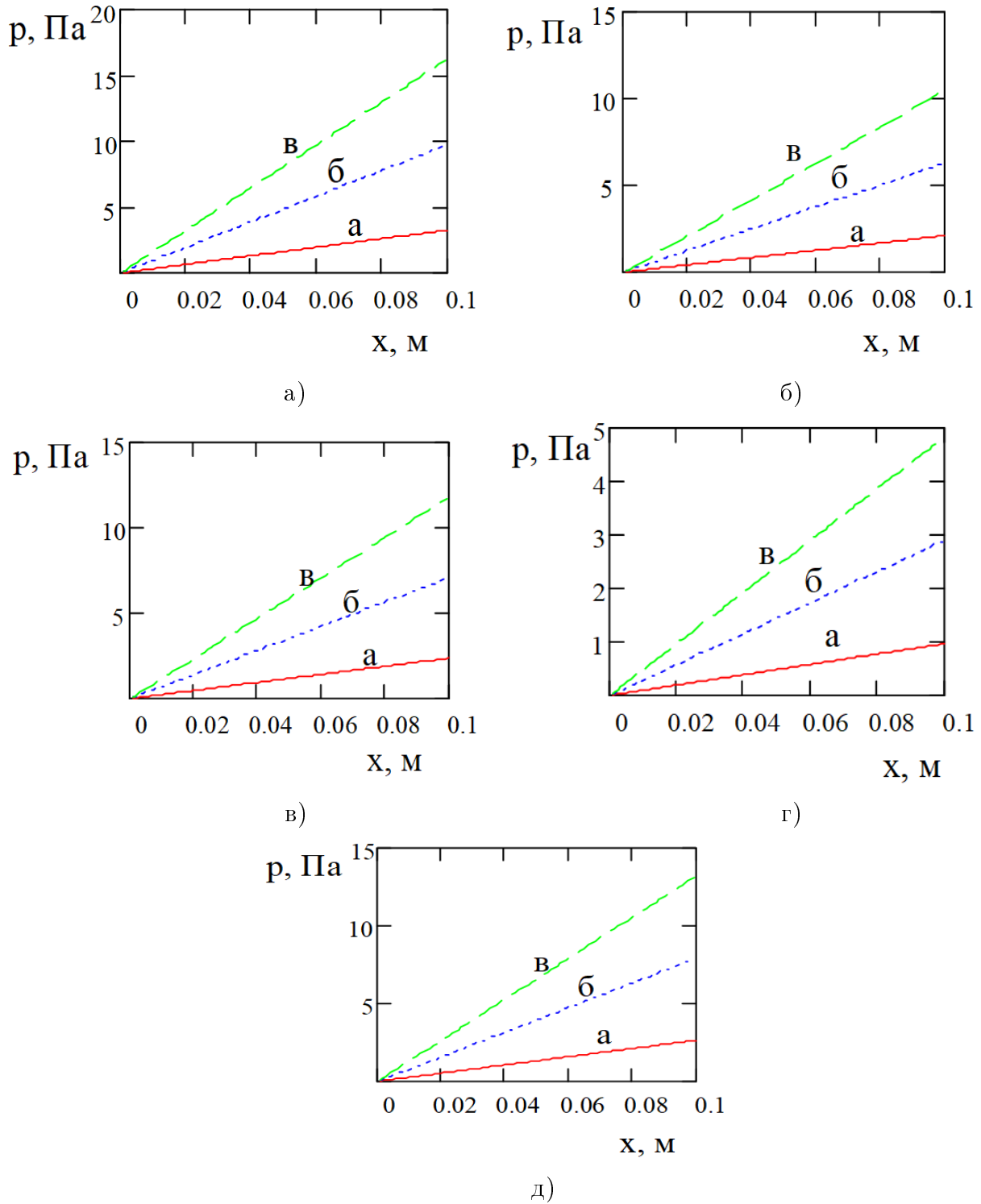


Рис. 1. Изменение амплитуды давления с расстоянием для различных значений частоты (а – 1 МГц, б – 3 МГц, в – 5 МГц) первой гармоники для: а) жировой ткани, б) крови, в) гомогенизированной печени, г) мышечной ткани, д) миомы

Далее из данного уравнения получают выражение для второй гармоники акустического сигнала:

$$v^{(2)} = \frac{\varepsilon v_0 Re}{2} (e^{-2\alpha x} - e^{-4\alpha x}) \sin 2\omega t, \quad (33)$$

Re – число Рейнольдса.

Уравнение (33) применимо только для случаев малости нелинейных процессов, что для целей восстановления нелинейного параметра может быть недостаточным.

Кроме того, особенностью данного уравнения является то, что вид решения для уравнения Бюргерса будет зависеть от рассматриваемого участка профиля акустической волны [14].

Для измерения акустического нелинейного параметра вводят величину N :

$$N = \frac{A_n}{A_1}, \quad (34)$$

где A_n – амплитуда n -гармоники акустической волны, A_1 – амплитуда основной частоты. С помощью средств спектрального анализа проводится измерение показателя N для дальнейшего получения акустического нелинейного параметра на некотором расстоянии от точки входа зондирующего излучения в среду.

В рамках данной модели не до конца рассматривается получение послойного изображения исследуемого объекта, что необходимо для решения задач томографии [15].

На основе анализа рассмотренных моделей предлагается модель восстановления акустического нелинейного параметра, учитывающая принципы томографических систем.

Для среды, постоянной по давлению p , акустический нелинейный параметр запишем в виде:

$$\varepsilon(x) = 1 + \frac{B}{2A}. \quad (35)$$

Для расчёта акустического поля воспользуемся уравнением Бюргерса в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon(x)}{c^3(x)\rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{b}{2c^3(x)\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}. \quad (36)$$

Решение данного уравнения для случая, когда нелинейные эффекты играют преобладающую роль, имеет вид:

$$p = p_0 \sin \left\{ \omega \left[t - x \left(\frac{1}{c} - \frac{\varepsilon p}{c^3 \rho_0} \right) \right] \right\}. \quad (37)$$

В данном решении учитываются зависимость от расстояния не только нелинейного параметра, но и скорости звука для повышения разрешающей способности.

Перепишем выражение (37) в интегральной форме для того, чтобы рассчитать изменения акустического нелинейного параметра вдоль пути следования акустического луча:

$$p(x) = \int_r g(x,r) p_0(x) \left\{ \omega \left[t - x \left(\frac{1}{c(r)} - \frac{\varepsilon(r)p}{c^3(r)\rho_0} \right) \right] \right\} dr, \quad (38)$$

где $g(x,r) = \frac{e^{-jk|x-r|}}{|x-r|}$ – функция Грина, k – волновое число.

Для того, чтобы восстановить распределение акустического параметра в сечении объекта, то есть получить томограмму, введем подвижную систему координат с осями $O\zeta$ и $O\xi$.

Взаимосвязь между подвижной и неподвижными системами координат:

$$\zeta = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad \xi = -x \sin \theta + y \cos \theta, \quad (39)$$

$$x = \zeta \cos \theta - \xi \sin \theta, \quad y = \zeta \sin \theta + \xi \cos \theta.$$

Тогда выражение для проекции амплитуды регистрируемого акустического давления $p(\xi, \zeta)$ будет:

$$p(\xi, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, r) \left\{ \omega \left[t - r \left(\frac{1}{c(r)} - \frac{\varepsilon(r)p}{c^3(r)\rho_0} \right) \right] \right\} d\zeta \quad (40)$$

Чтобы связать измеренные проекции с нелинейным параметром воспользуемся положениями теоремы о центральном сечении. Для этого примем что:

$$p'(\omega, \theta) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi, \theta) \exp(-i\xi\omega) d\xi = \\ (2\pi)^{-1/2} \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} p(r, \varphi) \exp(-ir\rho \cos(\theta - \varphi)) d\varphi \quad (41)$$

Здесь уже зависимость нелинейного параметра ε и скорости звука c будет представлена уже в полярных координатах и образ Фурье для проекции $p'(\rho, \theta)$ будет уже в координатах, необходимых для построения послойного изображения.

Для проведения экспериментальных измерений акустического нелинейного параметра была разработана структурная схема установки, представленная на рисунке 2.



Рис. 2. Структурная схема экспериментальной установки

Работа данной подсистемы построена на следующем алгоритме действий. Сигнал с генератора поступает на формирователь импульсов, сформированный импульс поступает на излучатель, генерирующий сигнал частотой 2 МГц. Сформированный акустический сигнал попадает на исследуемый объект, являющийся моделью биологической среды. После взаимодействия зондирующего излучения с биологическим объектом полученный сигнал поступает на приемник, а далее на усилитель, выполненный по двухтактной схеме, фильтруется и поступает в персональный компьютер (ПК) [16].

Данная установка позволит решить следующие задачи экспериментального исследования, необходимые для проверки теоретических результатов:

- исследование процессов возникновения и распространения второй гармоники акустического сигнала;
- проведение анализа амплитудных распределений давления второй гармоники сигнала;
- получение значений акустического нелинейного параметра в исследуемом объекте.

Заключение

Рассмотренные модели восстановления акустического нелинейного параметра позволяют построить изображение внутренних структур различных объектов исследований, в том числе и биологических. Тем не менее обозначенные недостатки показанных моделей оставляют актуальным вопрос совершенствования способов восстановления распределения акустического нелинейного параметра.

В предложенной модели учтены не только особенности процессов взаимодействия биологической среды с ультразвуковыми волнами, но и предложен способ для построения послойного изображения исследуемых объектов.

Список литературы

1. Gan, W.S. Applications of Nonlinear Acoustical Imaging and Conclusions // *Nonlinear Acoustical Imaging*. – Singapore : Springer, 2021. DOI: 10.1007/978-981-16-7015-2_11.
2. Panfilova, A. A review on B/A measurement methods with a clinical perspective / A. Panfilova, J. G. Ruud, W. van Sloun, H. Wijkstra, O. A. Sapozhnikov, M. Mischi // *J Acoust Soc. Am.* – 2021. – Vol. 149, No. 4. – P. 2200-2237. DOI: 10.1121/10.0003627.
3. Tiwari, R. K. Comparative study of acoustic non-linearity parameter in binary mixtures of N, N-dimethylacetamide with Polyethylene Glycols at different temperatures / R. K. Tiwari, V. Verma, A. Awasthi, S. K. Trivedi, P. K. Pandey, A. Awasthi // *Journal of Molecular Liquids*. – 2021. – Vol. 343. – P. 117707. DOI: 10.1016/j.molliq.2021.117707.
4. Герасимов, А. И. Потери акустической энергии при прохождении звуковой волны через пористо-волоконистый материал / А. И. Герасимов, М. Д. Васильев, А. М. Светлоруссова // *Noise Theory and Practice*. – 2019. – Т. 5, № 4(18). – С. 46-52.
5. Буров, В. А. Акустическая томография нелинейного параметра с помощью малого числа преобразователей / В. А. Буров, С. Н. Евтухов, А. М. Ткачева, О. Д. Румянцева // *Акустический журнал*. – 2006. – Т. 52, № 6. – С. 760-776.
6. Буров, В. А. Численное и физическое моделирование процесса томографии на основе акустических нелинейных эффектов третьего порядка / В. А. Буров, А. А. Шмелев // *Акустический журнал*. – 2009. – Т. 55, № 4-5. – С. 466-480.
7. Буров, В. А. Проблемы использования нелинейных коллинеарных процессов в акустической томографии третьего порядка / В. А. Буров, Р. В. Крюков, О. Д. Румянцева, А. А. Шмелев // *Акустический журнал*. – 2012. – Т. 58, № 1. – С. 57-79.
8. Буров, В. А. Прототип томографической системы, использующей акустические нелинейные эффекты третьего порядка / В. А. Буров, А. А. Шмелев, Д. И. Зотов // *Акустический журнал*. – 2013. – Т. 59, № 1. – С. 31-51.
9. Zotov, D. I. Calculating Fields Scattered by an Inhomogeneous Area with a Large Wave Size / D. I. Zotov, O. D. Rummyantseva, A. S. Cherniaev // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. – 2024. – Vol. 88, No. 1. – P. 113-118. DOI: 10.1134/S106287382370507X.
10. Беленьков, Р. Н. Подход к расчету параметра нелинейности ультразвуковых волн в жидкости, основанный на масштабной теории термодинамических флуктуаций давления / Р. Н. Беленьков, Е. Б. Постников // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. – 2023. – Т. 31, № 1. – С. 45-62.
11. Kaltenbacher, B. On the identification of the nonlinearity parameter in the Westervelt equation from boundary measurements / B. Kaltenbacher, W. Rundell // *Inverse Problems and Imaging*. – 2021. – Vol. 15, No. 5. – P. 865-891.

12. Ali, R. Impact of starting model on waveform inversion in ultrasound tomography / R. Ali, T. Mitcham, N. Duric // *Medical Imaging 2023: Ultrasonic Imaging and Tomography*, SPIE, 2023. – Vol. 12470. – P. 124700J. DOI: 10.1117/12.2653575.
13. Chien, L. D. Determination of nonlinearity parameter B/A of liquids by comparison with solutions of the three-dimensional Westervelt equation / L. D. Chien, J. M. Cormack, E. C. Everbach, M. F. Hamilton // *Proc. Mtgs. Acoust.* – 2021. – Vol. 150, No. 4. DOI: <https://doi.org/10.1121/2.0001563>.
14. Chernov, N. N. Research of appearance and propagation of higher harmonics of acoustic signals in the nonlinear media / N. N. Chernov, M. V. Laguta, A. Y. Varenikova // *Journal of Pharmaceutical Sciences and Research.* – 2017. – Vol. 9, No. 11. – P. 2241-2246.
15. Демин, И. Ю. Современные акустические методы исследований в биологии и медицине. Учебно-методические материалы по программе повышения квалификации «Хранение и обработка информации в биологических системах» / И. Ю. Демин, Н. В. Прончатов-Рубцов. – Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2007. – 121 с.
16. Вареникова, А. Ю. Установка для исследования распространения ультразвуковой волны в биотканях с учетом нелинейности среды / А. Ю. Вареникова, Н. Н. Чернов // *Фундаментальные исследования с применением компьютерных технологий в науке, производстве, социальных и экономических процессах : материалы 18-ой Национальной молодежной научно-практической конференции, Новочеркасск, 17–18 января 2019 года / Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова.* – Новочеркасск: Общество с ограниченной ответственностью «Лик», 2019. – С. 263-268.

References

1. Gan, W.S. *Applications of Nonlinear Acoustical Imaging and Conclusions // Nonlinear Acoustical Imaging.* – Singapore : Springer, 2021. DOI: 10.1007/978-981-16-7015-2_11.
2. Panfilova, A. A review on B/A measurement methods with a clinical perspective / A. Panfilova, J. G. Ruud, W. van Sloun, H. Wijkstra, O. A. Sapozhnikov, M. Mischi // *J Acoust Soc. Am.* – 2021. – Vol. 149, No. 4. – P. 2200-2237. DOI: 10.1121/10.0003627.
3. Tiwari, R. K. Comparative study of acoustic non-linearity parameter in binary mixtures of N, N-dimethylacetamide with Polyethylene Glycols at different temperatures / R. K. Tiwari, V. Verma, A. Awasthi, S. K. Trivedi, P. K. Pandey, A. Awasthi // *Journal of Molecular Liquids.* – 2021. – Vol. 343. – P. 117707. DOI: 10.1016/j.molliq.2021.117707.
4. Gerasimov, A. I. Losses of acoustic energy during the passage of a sound wave through a porous fibrous material / A. I. Gerasimov, M. D. Vasiliev, A.M. Svetlorussova // *Noise Theory and Practice.* – 2019. – Vol. 5, No. 4(18). – P. 46-52.
5. Burov, V. A. Acoustic tomography of a nonlinear parameter using a small number of transducers / V. A. Burov, S. N. Yevtukhov, A.M. Tkacheva, O. D. Rumyantseva // *Acoustic Journal,* – 2006, – Vol. 52, No. 6, – P. 760-776.
6. Burov, V. A. Numerical and physical modeling of the tomography process based on acoustic nonlinear effects of the third order / V. A. Burov, A. A. Shmelev // *Acoustic Journal,* – 2009, – Vol. 55, No. 4-5, – P. 466-480.
7. Burov, V. A. Problems of using nonlinear collinear processes in third-order acoustic tomography / V. A. Burov, R. V. Kryukov, O. D. Rumyantseva, A. A. Shmelev // *Acoustic Journal.* – 2012. – Vol. 58, No. 1. – P. 57-79.
8. Burov, V. A. Prototype of a tomographic system using acoustic nonlinear effects of

the third order / V. A. Burov, A. A. Shmelev, D. I. Zotov // *Acoustic Journal*, –2013, – Vol. 59, No. 1, – P. 31-51.

9. Zotov, D. I. Calculating Fields Scattered by an Inhomogeneous Area with a Large Wave Size / D. I. Zotov, O. D. Rumyantseva, A. S. Cherniaev // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. – 2024. – Vol. 88, No. 1. – P. 113-118. DOI: 10.1134/S106287382370507X.

10. Belenkov, R.N. An approach to calculating the parameter of nonlinearity of ultrasonic waves in a liquid based on a large-scale theory of thermodynamic pressure fluctuations / R.N. Belenkov, E. B. Postnikov // *News of higher educational institutions. Applied nonlinear dynamics*. - 2023. – Vol. 31, No. 1. – P. 45-62.

11. Kaltenbacher, B. On the identification of the nonlinearity parameter in the Westervelt equation from boundary measurements / B. Kaltenbacher, W. Rundell // *Inverse Problems and Imaging*. – 2021. – Vol. 15, No. 5. – P. 865-891.

12. Ali, R. Impact of starting model on waveform inversion in ultrasound tomography / R. Ali, T. Mitcham, N. Duric // *Medical Imaging 2023: Ultrasonic Imaging and Tomography*, SPIE, 2023. – Vol. 12470. – P. 124700J. DOI: 10.1117/12.2653575.

13. Chien, L. D. Determination of nonlinearity parameter B/A of liquids by comparison with solutions of the three-dimensional Westervelt equation / L. D. Chien, J. M. Cormack, E. C. Everbach, M. F. Hamilton // *Proc. Mtgs. Acoust.* – 2021. – Vol. 150, No. 4. DOI: <https://doi.org/10.1121/2.0001563>.

14. Chernov, N. N. Research of appearance and propagation of higher harmonics of acoustic signals in the nonlinear media / N. N. Chernov, M. V. Laguta, A. Y. Varenikova // *Journal of Pharmaceutical Sciences and Research*. – 2017. – Vol. 9, No. 11. – P. 2241-2246.

15. Demin, I. Y. Modern acoustic research methods in biology and medicine. Educational and methodological materials on the advanced training program ‘Information storage and processing in biological systems’ / I. Y. Demin, N. V. Pronchatov-Rubtsov. – Nizhny Novgorod : NNSU Publishing House, 2007. – 121 p.

16. Varenikova, A. Y. An installation for studying the propagation of an ultrasonic wave in biological tissues, taking into account the nonlinearity of the medium / A. Y. Varenikova, N. N. Chernov // *Fundamental research using computer technology in science, production, social and economic processes : proceedings of the 18th National. He’s young. scientific. - practical conference, Novochoerkassk, January 17-18, 2019* / South Russian State Polytechnic University (NPI) named after M.I. Platov. – Novochoerkassk: ‘Lik’ Limited Liability Company, 2019. – P. 263-268.